LAHENDUSED 12.klass

1. *Vastus:* $\boldsymbol{\dfrac{80}{\sqrt{2\sin\alpha}}}$ **meetrit.**

Lahendus. Olgu rööpküliku ühe külje pikkus on x (m) ja teise külje pikkus on y (m). Rööpkülikukujulise maatükki pindala on 400, seega:

$$xy\sin\alpha = 400,$$

kust

$$y = \frac{400}{x\sin\alpha}.$$

Niisiis on tara pikkus

$$L(x) = 2x + \frac{400}{x\sin\alpha}.$$

Ekstreemumkoha leiame tingimusest $L'(x) = 0$.

$$L'(x) = 2 - \frac{400}{x^2\sin\alpha},$$

millest

$$2 - \frac{400}{x^2\sin\alpha} = 0 \quad (x \neq 0,\ \ \sin\alpha \neq 0)$$

$$x^2\sin\alpha = 200$$

$$x = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{\sin\alpha}}$$

Et $L''\left(\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{\sin\alpha}}\right) = \dfrac{2\sqrt{\sin\alpha}}{5\sqrt{2}} > 0$, siis on tegemist miinimumkohaga.

Minimaalne tara pikkus:

$$2\cdot\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{\sin\alpha}} + \frac{400}{10\sqrt{2\sin\alpha}} = \frac{80}{\sqrt{2\sin\alpha}} \quad (m).$$

2. *Vastus:* $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

Lahendus. $\dfrac{\log_b 2\cdot\left(\log_{a^2} c-\log_c \sqrt{a}\right)}{\log_a 4-2\log_c 2}=\ldots$

Teisendame kõik liikmed alusele 2.

$$\ldots=\frac{\dfrac{1}{\log_2 b}\left(\dfrac{\log_2 c}{\log_2 a^2}-\dfrac{\log_2\sqrt{a}}{\log_2 c}\right)}{\dfrac{2}{\log_2 a}-\dfrac{2}{\log_2 c}}=\ldots$$

Lihtsustame.

$$\ldots=\frac{1}{\log_2 b}\left(\frac{\log_2 c}{2\log_2 a}-\frac{0{,}5\log_2 a}{\log_2 c}\right):\frac{2\log_2 c-2\log_2 a}{\log_2 a\cdot\log_2 c}=$$

$$=\frac{1}{\log_2 b}\cdot\frac{\log_2^2 c-\log_2^2 a}{2\log_2 a\cdot\log_2 c}\cdot\frac{\log_2 a\cdot\log_2 c}{2\log_2 c-2\log_2 a}=$$

$$=\frac{(\log_2 c-\log_2 a)(\log_2 c+\log_2 a)\cdot\log_2 a\cdot\log_2 c}{\log_2 b\cdot 2\log_2 a\cdot\log_2 c\cdot 2(\log_2 c-\log_2 a)}=\frac{\log_2 c+\log_2 a}{2\cdot 2\log_2 b}=$$

$$=\frac{\log_2 ac}{2\log_2 b^2}=\ldots$$

Kuna a, b, ja c on geomeetrilise jada järjestikused liikmed, siis $b^2=ac$, ehk $\log_2 ac=\log_2 b^2$.

$$\ldots=\frac{\log_2 b^2}{2\log_2 b^2}=\frac{1}{2}.$$

3. *Tõestus.* $\underbrace{11\ldots1}_{2014}\underbrace{55\ldots5}_{2013}6=\ldots$

Kirjutame ühelist numbri 6 kujul $6=5+1$.

$\ldots=\underbrace{11\ldots1}_{2014}\underbrace{55\ldots5}_{2014}+1=\ldots$

Edasi teisendame avaldist järgmiselt.

$$\ldots=10^{4027}+10^{4026}+\ldots+10^{2014}+5\left(10^{2013}+10^{2012}+\ldots+1\right)+1=$$
$$=10^{2014}\left(10^{2013}+10^{2012}+\ldots+1\right)+5\left(10^{2013}+10^{2012}+\ldots+1\right)+1=\ldots$$

Sulgudes on tegemist geomeetrilise jadaga, milles $a_1=1$, $q=10$ ja $n=2014$. Vastavalt geomeetrilise jada summa valemile $S_n=\dfrac{a_1\cdot\left(q^n-1\right)}{q-1}$ saame $10^{2013}+10^{2012}+\ldots+1=\dfrac{1\cdot\left(10^{2014}-1\right)}{9}=\dfrac{10^{2014}-1}{9}$.

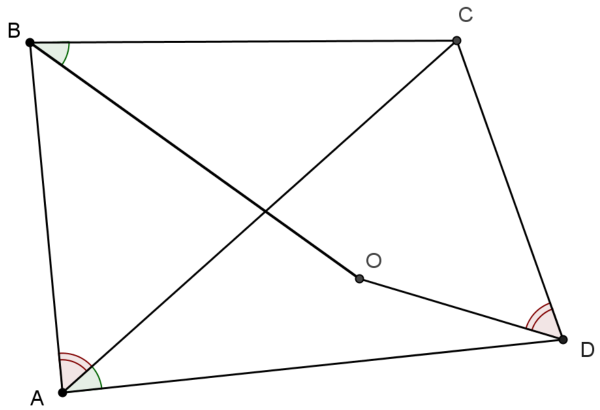
$$\ldots=10^{2014}\cdot\frac{10^{2014}-1}{9}+5\cdot\frac{10^{2014}-1}{9}+1=\frac{\left(10^{2014}\right)^2-10^{2014}+5\cdot10^{2014}-5+9}{9}=$$
$$=\frac{\left(10^{2014}\right)^2+4\cdot10^{2014}+4}{9}=\frac{\left(10^{2014}+2\right)^2}{9}=\left(\frac{10^{2014}+2}{3}\right)^2.$$

Et $10^{2014}+2$ ristsumma on 3, siis on $\dfrac{10^{2014}+2}{3}$ täisarv ning $\left(\dfrac{10^{2014}+2}{3}\right)^2$ täisarvu ruut.

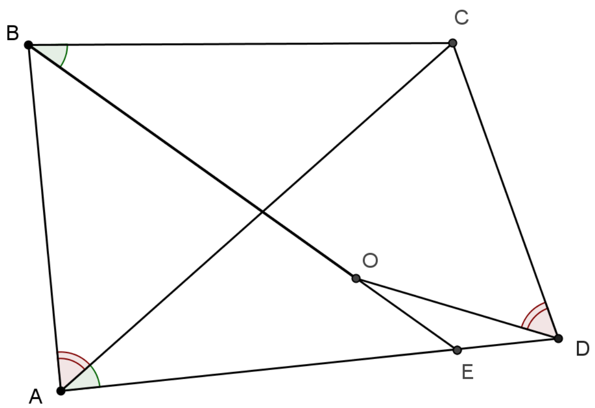
M. o. t. t.

4.

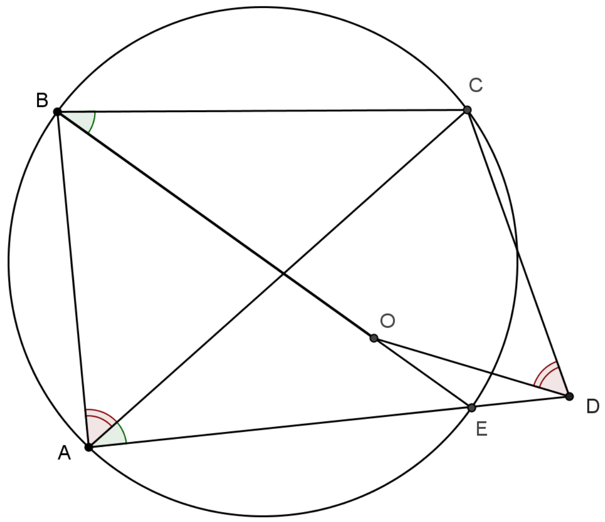
Tõestus. Teeme abistava joonise.



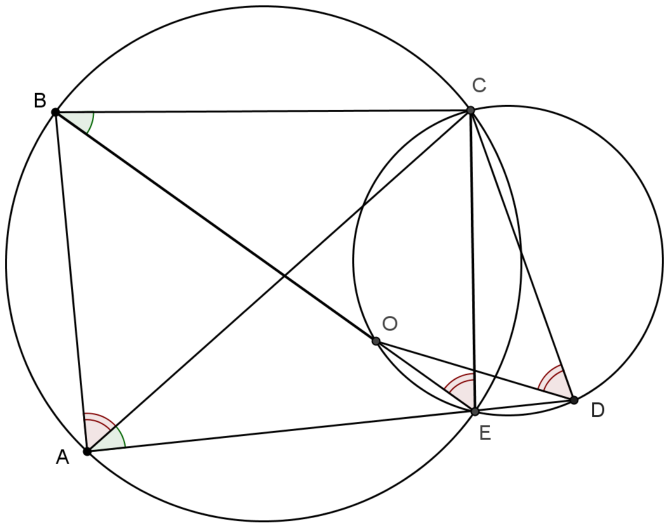
1) Pikendame sirglõiku BO nelinurga $ABCD$ küljeni AD. Tähistame lõikepunkti tähega E.



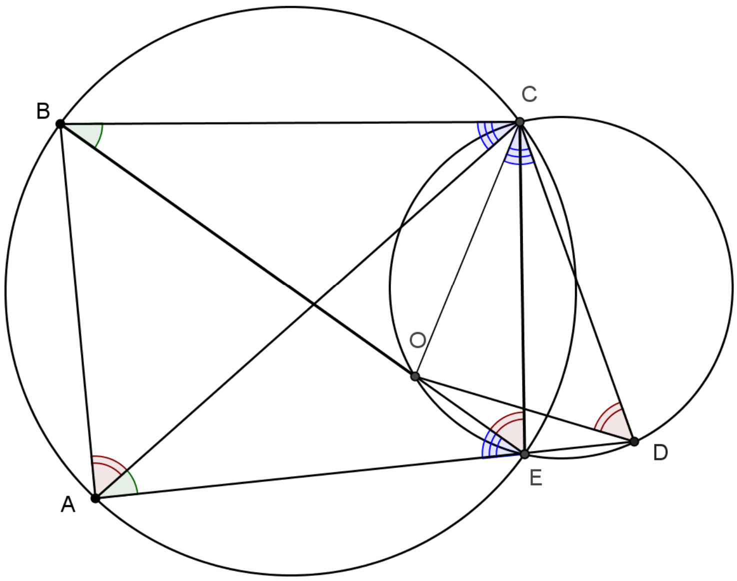
2) Kuna $\angle EAC = \angle EBC$, siis leidub nelinurgal $ABCE$ ümberringjoon (samale kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed).



3) Et $\angle ODC = \angle BAC = \angle CEB = \angle CEO$ (piirdenurgad, mis toetuvad samale kaarele), siis leidub ka nelinurgal $OCED$ ümberringjoon.



4) Et kõõlnelinurga vastasnurga vastasnurkade summa on $180°$, siis saame $\angle OCD = 180° - \angle OED = \angle AEB$.
$\angle AEB = \angle ACB$ (piirdenurgad, mis toetuvad samale kaarele)



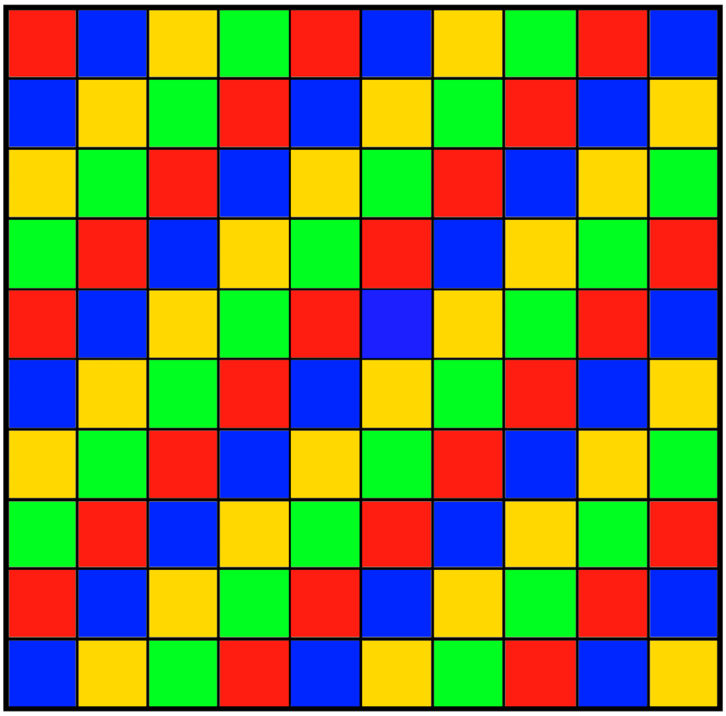
Niisiis $\angle ACB = \angle OCD$.

M. o. t. t.

Samale tulemusele jõuab ka lõigu *DO* pikendamisel.

5. *Vastus:* **76 ruutu**.

Lahendus. Värvime ruudustiku diagonaaliti nelja erineva värviga. Näiteks järgmiselt:



Sellise värvimise puhul on iga 1×4 ristülik oma asukohast sõltumata värvitud nelja erineva värviga, iga 1×4 ristküliku iga ruut on erinevat värvi.

Kui lugeda üks värvidest mittevärvimiseks ning 3 värvi värvimiseks, siis oleks ruudustiku kõikide 1×4 ristüliku kolm ruutu värvitud ning üks värvimata.

Meie ruudustikus on 25 punast ruutu, 26 sinist ruutu, 25 kollast ruutu ja 24 rohelist ruutu.

Rohelisi ruute on kõige vähem. Maksimaalse arvu värvitud ruutude saamiseks jätame just rohelised ruudud värvimata.

Maksimaalselt saab värvida $100 - 24 = 76$ ruutu.

HINDAMINE

1.	Rööpküliku külgede tähistamise ja pindala avaldamise eest	1p
	Tara pikkuse avaldise leidmise eest	2p
	Ekstreemumkoha leidmise eest	2p
	Miinimumkoha kontrolli eest	1p
	Korrektse vastuse eest	1p
		7p
2.	Ühisele alusele (näiteks 2) ülemineku eest	1p
	Ühisele alusele viidud avaldise lihtsustamise eest	4p
	Tähelepaneku, et $b^2 = ac$, eest	1p
	Õige vastuse eest	1p
		7p
3.	Arvu $\underbrace{11...1}_{2014}\underbrace{55...5}_{2013}6$ kümne astmete summana väljakirjutamise eest	1p
	Geomeetrilise jada märkamise eest	1p
	Geomeetrilise jada summa valemi kasutamise eest	2p
	Ruuduks teisendamise eest	2p
	Selgituse, et tegemist on täisarvu ruuduga, eest	1p
		7p
4.	Lõigu *BO* või *DO* küljega lõikumiseni pikendamise eest	2p
	Mõistetud, et nelinurgal *ABCE* (*ADCE*) leidub ümberringjoon	2p
	Mõistetud, et nelinurgal *CDEO* (*CBEO*) leidub ümberringjoon	2p
	Nurkade $\angle ACB$ ja $\angle ACD$ võrdsuse näitamine	1p
		7p
5.	Ruudustiku värvimise (vms) kasutamise eest	2p
	Õige (diagonaaliti) värvimise, mis viib õige lahenduseni, eest	4p
	Õige vastuse eest	1p
	Märkus. Lahenduseta õige vastuse eest 1p.	**7p**